

AUTOMORPHISMES DE S_n .

Leçons : 101 104 105 108

References : Perrin p. 31

FGN Alg 1 p. 74.

Théorème

Pour $n \neq 6$, les automorphismes de S_n sont intérieurs.

Résumé

I - Lemme : Si $\varphi \in \text{Aut } S_n$ conserve les transpositions, c'est un automorphisme intérieur.

II - Les transpositions sont d'ordre 2. Donc leurs images aussi, comptons le nombre d'éléments qui commutent avec les éléments d'ordre 2.

III - Si $\sigma \in S_n$ commute avec τ , alors $\varphi(\sigma)$ commute aussi avec $\varphi(\tau)$. On a donc égalité des cardinaux des centralisateurs, ce qui permet de conclure.

I] Soit $\varphi \in \text{Aut } S_n$ qui envoie les transpositions sur les transpositions.

Posons $\tau_i = (1 \ i)$ pour $i = 2$ à n .

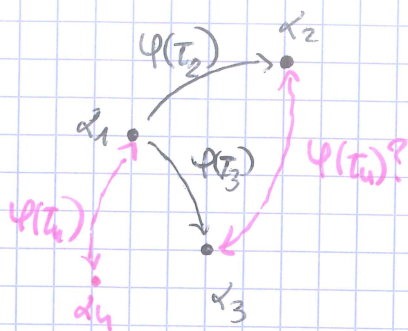
$\rightarrow$ ce n'est pas un hasard, les τ_i engendrent S_n !

Par hypothèse, $\varphi(\tau_2) = (\alpha_1 \ \alpha_2)$ est une transposition.

Comme pour $i \neq j$, τ_i et τ_j ne commutent pas, elles ont des supports non disjoints, et $\varphi(\tau_i)$ et $\varphi(\tau_j)$ aussi !

On peut donc supposer $\varphi(\tau_3) = (\alpha_1 \ \alpha_3)$.

où $\alpha_2 \neq \alpha_3$ par surjectivité de φ .



• Pour τ_4 , on a deux possibilités :

* $\varphi(\tau_4) = (\alpha_2 \alpha_3)$ mais alors

$$\varphi^{-1}(\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_2 \alpha_3)(\alpha_3 \alpha_4) = \begin{cases} (12)(13)(14) \\ \varphi^{-1}(\alpha_1 \alpha_2) = (13) \end{cases}$$

ce qui est impossible

* $\varphi(\tau_4) = (\alpha_1 \alpha_4)$ où $\alpha_4 \notin \{\alpha_2, \alpha_3\}$.

• Par suite, et par injectivité de φ , on trouve $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distincts tels que

$$\varphi(\tau_i) = (\alpha_1 \alpha_i) \quad i=2 \text{ à } n.$$

En posant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ on a alors

$$\alpha \tau_i \alpha^{-1} = (\alpha_1 \alpha_i) = \varphi(\tau_i)$$

• Donc comme les τ_i engendrent S_n , $\varphi = \sigma \mapsto \alpha \sigma \alpha^{-1}$ est un automorphisme intérieur.

II • Si τ est une transposition, $\varphi(\tau)$ est d'ordre 2.

→ c'est donc un produit de transpositions disjointes.

• De plus, si σ commute avec τ , $\varphi(\sigma)$ commute avec $\varphi(\tau)$, on a donc l'égalité des cardinaux des centralisateurs :

$$|c(\tau)| = |c(\varphi(\tau))| \text{ pour tout élément de } S_n.$$

• Or $c(\tau)$ est la classe de conjugaison de τ , elle est donc déterminée par la suite $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ des nombres de cycles de longueur i .

• Mais $\sigma \tau \sigma^{-1} = (\sigma(\tau_1), \dots, \sigma(\tau_n))$, donc pour conserver les k_i , il faut :

- * envoyer les cycles de longueur i sur des cycles de longueur i
- * décaler entre 0 et $i-1$ fois les éléments de chaque cycle.

Au total, pour les cycles de longueur i , on a
 $(k_i \cdot i) \times ((k_i - 1) \cdot i) \times \dots \times (1 \cdot i)$ possibilités.

Ce qui donne : $|C(\tau)| = \prod_{i=1}^n k_i! \cdot i^{k_i}$

III - L'égalité $|C(\tau)| = |C(\varphi(\tau))|$ donne alors, dans le cas où :

* τ est une transposition

* $\varphi(\tau)$ une composition de k 2-cycles :

Si $k \geq 2$ $((n-2)! \cdot 1^{n-2}) (1! \times 2^1) = ((n-2k)! \cdot 1^{n-2k}) \cdot (k! \cdot 2^k)$

• On peut le réécrire sous la forme :

$$\frac{(n-2)!}{(n-2k)!} \cdot \frac{1}{k! 2^{k-1}} = 1$$

ou encore $\binom{n-2}{2k-2} \frac{(2k-2)!}{2^{k-1} k!} = \binom{n-2}{2k-2} \frac{(2k-3)(2k-5) \dots 1}{k} = 1$

• On doit donc avoir $\frac{2^{k-3}}{k} \leq 1$ soit $2^{k-3} \leq k$ ou $k \leq 3$.

$\Rightarrow$ donc $k=2$ ou $k=3$.

* Si $k=2$, l'égalité donne : $\frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$

soit $(n-2)(n-3) = 4$ ce qui est impossible

* Si $k=3$, on a $\binom{n-2}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4!} = 1$

donc $4 = n-2$ soit $n=6$

ou $n-2-k = n-2$ ce qui est impossible.

En conclusion, si $n \neq 6$, alors $k < 2$, et l'égalité est vraie pour $k=1$, donc φ envoie les transpositions sur les transpositions.

$\Rightarrow$ donc φ est intérieur !