

THEOREME DE BURNSIDE

Leçons 104, 106, 157 et éventuellement 152.

Référence FGN Algèbre 2 p. 185

Théorème

Un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (ie il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $A \in G$, $A^N = I$) est fini.

Résumé

I - LEMME: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(A^k) = 0$.

(On n'a besoin que de $\Leftarrow$, et l'autre sens se montre facilement de cette façon).

II - Étude de l'injectivité de $f: A \in G \mapsto (\text{tr}(A^k))_{1 \leq k \leq m} \in \mathbb{C}^m$, où les $(\pi_i)_{1 \leq i \leq m}$ forment une base de $\text{vect}(G)$ et conclusion.

≡ • Supposons que $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifie $\text{tr} A^k = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

• A est trigonalisable car χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$.

elle est même semblable à une matrice triangulaire à coefficients diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de A , présentes avec leurs multiplicités $m_1, \dots, m_r$. On suppose que $\lambda_1 = 0$.

• Dès lors, A^k est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec les $0, \lambda_1^k, \dots, \lambda_r^k$ sur la diagonale.

• L'hypothèse donne donc $\text{tr} A^k = m_1 \lambda_1^k + \dots + m_r \lambda_r^k = 0$.

• Comme les λ_i nuls n'apparaissent pas dans cette équation, supposons les $\lambda_i \neq 0$.
(On enlève just les autres de l'équation)

- On obtient ainsi le système linéaire en $(n_1, \dots, n_r)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Or A est une matrice de Vandermonde, au presque:

$$A = \lambda_1 \dots \lambda_r \cdot \text{Vandermonde}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

- Mais on peut calculer

$$\begin{aligned} \det V(\lambda_1, \dots, \lambda_r) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \dots & \lambda_2^{r-1} - \lambda_1^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_r - \lambda_1 & \lambda_r^2 - \lambda_1^2 & \dots & \lambda_r^{r-1} - \lambda_1^{r-1} \end{pmatrix} \quad (e_i \leftarrow \lambda_1 e_{i-1}) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_r - \lambda_1) \cdot \det V(\lambda_2, \dots, \lambda_r) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \end{aligned}$$

- Pour $\lambda_i \neq 0$ distincts, on a donc un système de Cramer, ce qui impose $m_1 = \dots = m_r = 0$.

→ les valeurs propres non nulles de A ont donc une "multiplicité nulle", c'est-à-dire qu'il n'y en a pas!

- Autrement dit, $\chi_A = X^n$ annule A donc A est nilpotente.

II • Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini.

Prenons $(\pi_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base du sous-espace vectoriel $\text{vect}(G)$.

Cela permet de définir

$$\begin{aligned} \varphi: G &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ A &\longmapsto (\text{tr}(A\pi_i))_{1 \leq i \leq m}. \end{aligned}$$

- Remarquons d'abord que les matrices de G sont annihilées par le polynôme $X^n - 1$, scindé à racines simples, et sont donc diagonalisables !

- Montrons maintenant que f est surjective !

- Si $f(A) = f(B)$, on a $\text{tr}(A\Gamma) = \text{tr}(B\Gamma)$ pour tout $\Gamma \in G$.

Ainsi, $\text{tr}((AB^{-1})^k) = \text{tr}(\underbrace{AB^{-1}(AB^{-1})^{k-1}}_{\in G})$ pour $k \geq 1$

$$= \text{tr}(BB^{-1}(AB^{-1})^{k-1}) \quad \text{par hypothèse}$$

$$= \text{tr}((AB^{-1})^{k-1})$$

$$= \text{tr}(I_n) = n \quad \text{par récurrence.}$$

Des lors, calculons

$$\text{tr}((AB^{-1} - I_n)^k) = \text{tr}\left(\sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (AB^{-1})^\ell (-1)^{k-\ell}\right)$$

$$= n \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-1)^\ell$$

$$= n \cdot (1-1)^k = 0 \quad \text{par le binôme de Newton.}$$

Donc $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente d'après le lemme.

- Mais elle est diagonalisable, donc $AB^{-1} - I_n = 0$ soit $A = B$.

Donc f est bien surjective.

- Finalement, remarquons que l'image de f est finie.

En effet, $f(G)$ est inclus dans X^n , où X est l'ensemble des valeurs prises par la trace d'éléments de G .

→ Comme f est surjective à valeur dans un ensemble fini, G est fini !