

THEOREME DE CAUCHY-LIPSCHITZ.

Lecons : 220

Reference : Gaudon

Theoreme

• Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue

localement lipschitzienne en la seconde variable.

$(t_0, x_0) \in \Omega$.

On considere le probleme:

$$(S) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Alors il existe $h > 0$ et $x: I_h \rightarrow \mathbb{R}^n$ ^{UNIQUE} solution au probleme (S) et telle que $x(t_0) = x_0$, avec $I_h = [t_0 - h; t_0 + h]$.

• De plus, il n'y a qu'une seule solution maximale $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Resumé

I - Contrôler les éléments en jeu.

II - Définir un opérateur dont un point fixe est solution et le trouver.

III - Regarder les solutions maximales

I • Fixons d'abord $r > 0$ tel que :

$$- \underbrace{[t_0 - r; t_0 + r]}_{I_r} \times \underbrace{\bar{B}(x_0, r)}_{B_r} \subseteq \Omega$$

- f est • bornée par M sur $I_r \times B_r$ (compact!)

• k -lipschitzienne en sa 2^e variable.

• Par ailleurs, une solution de (S) vérifie, pour $x \in I$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du.$$

II • Pour $\alpha < r$, regardons $A(\alpha) = \mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{R}^d)$ et posons

$$F: A(\alpha) \longrightarrow \mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{R}^d)$$

$$x \longmapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du \right)$$

• On aimerait avoir $F(A(\alpha)) \subseteq A(\alpha)$. Ajustons α :

* Pour $t \in I_\alpha$, on a:

$$\begin{aligned} \|F(x)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(u, x(u))\| du \\ &\leq M|t - t_0| \leq M\alpha. \end{aligned}$$

* Donc si $M\alpha \leq r$, $A(\alpha)$ est stable par F .

• De plus, si F est strictement contractante, on a gagné.

Utilisons $A(\alpha)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour $t \in I_\alpha$, $x_1, x_2 \in A(\alpha)$, on a:

$$\begin{aligned} \|F(x_1)(t) - F(x_2)(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t f(u, x_1(u)) - f(u, x_2(u)) du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(u, x_1(u)) - f(u, x_2(u))\| du \\ &\leq k|t - t_0| \|x_1 - x_2\|_\infty \\ &\leq k\alpha \|x_1 - x_2\|_\infty. \end{aligned}$$

* Donc si $k\alpha < 1$, F est strictement contractante.

→ par le théorème du point fixe, le problème (S) admet une unique solution sur un intervalle $[I - \alpha; I + \alpha]$.

III] • Soient alors x_1 et x_2 deux solutions maximales de I dans $\mathbb{R}^n$ telles que $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$.

• Supposons qu'elles ne soient pas égales sur I .

Prenons alors $\tilde{t}_0$ le premier point où elles bifurquent :

$$\tilde{t}_0 = \inf \{ t \in I, t \geq t_0 \text{ et } x_1(t) \neq x_2(t) \}$$

On a alors $x_1(t) = x_2(t)$ pour $t \in [t_0, \tilde{t}_0]$.

Ainsi, par continuité, $x_1(\tilde{t}_0) = x_2(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$.

• Le théorème d'unicité locale donne alors un intervalle $[\tilde{t}_0 - \alpha, \tilde{t}_0 + \alpha]$ sur lequel x_1 et x_2 coïncident, ce qui contredit la définition de $\tilde{t}_0$.