THÉORÈME DE COMPACITÉ

Leçons 916, 203

Références

c'est un ensemble de variables.

Théorème

- Soit $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ l'ensemble des formules du calcul prépositionnel sur $\mathcal{P}$.
  et $S \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ un ensemble de formules du calcul prépositionnel.
- S est insatisfiable si et seulement si il contient un sous ensemble fini insatisfiable.

+ application :
  $\mathbb{Z}^2$ peut être pavé si et seulement si tous les carrés $[\![-n,n]\!]^2$ peuvent l'être.

Résumé

I - Un modèle est une interprétation (assignation de valeurs de vérités aux variables) qui rend une formule vraie.
L'ensemble des modèles d'une formule φ est :

$$\mathcal{I}(\varphi) = \{ I \in \{0,1\}^{\mathcal{P}} \mid I \models \varphi \}$$

Par induction structurelle sur $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, $\mathcal{I}(\varphi)$ est un ouvert fermé de $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$.
La propriété de Borel-Lebesgue donne ensuite le résultat.

II - Définition d'un ensemble de formules correspondant à la propriété :
"le plan est pavé par les tuiles d'un ensemble T"
Puis preuve par théorème de compacité

I] · On va utiliser les théorèmes suivants

Théorème (Tykhonov)

Un produit de compacts est compact au sens de la topologie produit.

Propriété (Borel-Lebesgue) Pour (X,d) compact : (c'est la définition d'un compact !)

Tout recouvrement ouvert de X contient un sous recouvrement fini.

- $\{0,1\}$ est compact pour sa topologie discrete $2^{\{0,1\}}$.
donc le théorème de Tykhonov donne la compacité de $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$ pour la topologie produit, T.
- Soit $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, $I(\varphi)$ est un ouvert fermé de $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$, on le prouve par induction structurelle sur $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$

→ $I(\perp) = \emptyset \in T$
$I(\perp)^c = \{0,1\}^{\mathcal{P}} \in T$.

→ Pour tout $p \in \mathcal{P}$:
$I(p) = \{1\} \times \prod_{q \neq p} \{0,1\} \in T$

$I(p)^c = \{0\} \times \prod_{q \neq p} \{0,1\} \in T$

→ si $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, supposons que $I(\varphi)$ et $I(\psi)$ sont des ouverts fermés de $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$.
- $I(\neg\varphi) = I(\varphi)^c$
- $I(\varphi \vee \psi) = I(\varphi) \cup I(\psi)$

sont des ouverts fermés de $\{0,1\}^{\mathcal{P}}$.

- Raisonnons par contraposée.
Si S est insatisfiable, alors $\bigcap_{\varphi \in S} I(\varphi) = \emptyset$.
La propriété de Borel-Lebesgue donne alors un sous ensemble fini S' de S tel que $\bigcap_{\varphi \in S'} I(\varphi) = \emptyset$.

En résumé : on a extrait de S un ensemble S' fini insatisfiable !

- Enfin, la réciproque est naturelle : il suffit de compléter un ensemble fini insatisfiable, il reste insatisfiable !

Remarque : le théorème peut alors aussi s'exprimer comme :
S est satisfiable $\Leftrightarrow$ tous ses sous ensembles finis sont satisfiables.

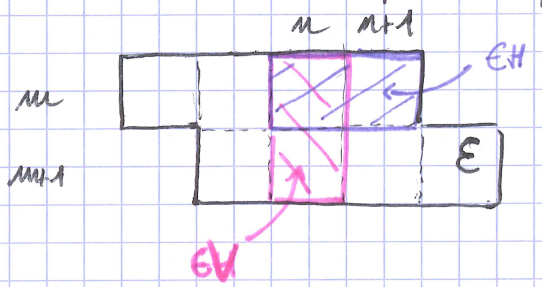
II • Soit T un ensemble fini de tuiles.

• On définit $H, V \subseteq T^2$ les compatibilités horizontales et verticales.

• Une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{Z}^2$ peut alors être pavée s'il existe $f : \mathcal{E} \to T$ telle que, pour tout $(m,n) \in \mathcal{E}$:

$\to (m+1, n) \in \mathcal{E} \Rightarrow (f(m,n), f(m+1,n)) \in H$

$\to (m, n+1) \in \mathcal{E} \Rightarrow (f(m,n), f(m,n+1)) \in V$



• Exprimons cela avec une formule du calcul propositionnel, en définissant un ensemble $S_\mathcal{E}$ de formules sur $\mathcal{P} = \mathbb{Z}^2 \times T$.

On notera $h(i,j) = (i, j+1)$ pour $i,j \in \mathbb{Z}^2$

$d(i,j) = (i+1, j)$

les voisins horizontal et vertical de (i,j).

• Dès lors, posons :

$$S_\mathcal{E} = \left\{ \left(\bigvee_{t \in T} (c,t) \right) \wedge \left(\neg \bigvee_{t \neq t' \in T} ((c,t) \wedge (c,t')) \right) \,\middle|\, c \in \mathcal{E} \right\}$$ il n'y a qu'une tuile par case

$$\cup \left\{ \bigvee_{(t,t') \in H} (c,t) \wedge (c',t') \,\middle|\, c \in \mathcal{E},\ c' = d(\mathcal{E}) \right\}$$ compatibilité horizontale

$$\cup \left\{ \bigvee_{(t,t') \in V} (c,t) \wedge (c',t') \,\middle|\, c \in \mathcal{E},\ c' = h(\mathcal{E}) \right\}$$ compatibilité verticale.

• $\mathcal{E}$ ne peut être pavé que si $S_\mathcal{E}$ est satisfiable, donc :

$S_{\mathbb{Z}^2}$ est satisfiable si et seulement si tout sous ensemble fini l'est.

Or pour $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^2$ fini, $S_\mathcal{E} \subseteq S_{[\![-n;n]\!]^2}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Donc si les carrés $[\![-n;n]\!]^2$, $n \in \mathbb{N}$ sont pavables, $\mathbb{Z}^2$ est pavable.