

ALGORITHME DE TYPE PRINCIPAL

Leçons 923, 929

Reference lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Sørensen p. 95.

Théorème

Soit B un ensemble dénombrable de variable de type.

Les types sont définis inductivement par $T ::= B \mid T \rightarrow T$.

On définit ensuite la relation de typage par les règles

$$\frac{x \in B}{\Gamma, x:\sigma \vdash x:\sigma}$$

variable

$$\frac{\Gamma \vdash t_1:\sigma' \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash t_2:\sigma'}{\Gamma \vdash t_1 t_2:\sigma}$$

application de fonction

$$\frac{\Gamma, x:\sigma' \vdash t:\sigma}{\Gamma, x:\sigma' \vdash \lambda x. t:\sigma' \rightarrow \sigma}$$

définition de fonction.

Alors pour un contexte Γ , un type σ et un terme t , on a équivalence entre :

* $\Gamma \vdash t:\sigma$

* il existe un unificateur d'un ensemble E_t d'équations sur les variables T_i où t est un λ -terme tel que $\sigma = \mu(T_t)$

$$\Gamma(x) = \mu(T_x) \text{ pour } x \in FV(t).$$

Remarque : c'est intéressant de résoudre ce problème d'unification car alors on a des types pour les λ -termes concernés, ce qui implique qu'ils soient fortement normalisants!

Résumé

I - Définition des égalités E_t et des variables "de type".

II - Preuve du théorème par induction.

I | • On définit E_t et τ_t par induction :

* si $t = x$ $E_x = \{x\}$

$\tau_x = \alpha_x$ une nouvelle variable.

* si $t = t_1 t_2$ $E_{t_1 t_2} = E_{t_1} \cup E_{t_2} \cup \{\tau_{t_1} = \tau_{t_2} \rightarrow \tau_{t_1 t_2}\}$

$\tau_{t_1 t_2} = \alpha$ une nouvelle variable.

* si $t = \lambda x. t_1$ $E_{\lambda x. t_1} = E_{t_1}$

$\tau_{\lambda x. t_1} = \tau_x \rightarrow \tau_{t_1} (= \alpha_x \rightarrow \tau_{t_1})$

II | • Proverons maintenant l'équivalence par induction

* si $t = x$

$\Rightarrow$ On a $\Gamma \vdash x : \sigma$

donc $\mu = \alpha_x \rightarrow \sigma$ unifie $E_x = \{x\}$

vérifie $\mu(\tau_x) = \mu(\alpha_x) = \sigma$.

$\Leftarrow$ On a μ qui unifie $E_x = \{x\}$

et $\mu(\tau_x) = \mu(\alpha_x) \in B$

Et on a $x : \mu(\alpha_x) \vdash x : \mu(\alpha_x)$

* si $t = t_1 t_2$

$\Rightarrow$ On a $\Gamma \vdash t_1 t_2 : \sigma$

D'où $\Gamma \vdash t_1 : \sigma' \rightarrow \sigma$

$\Gamma \vdash t_2 : \sigma'$

On a donc deux unificateurs μ_1, μ_2 qui unifient E_{t_1} et E_{t_2}

avec $\Gamma(x) = \mu_1(\alpha_x)$ pour $x \in FV(t_1)$

$\Gamma(x) = \mu_2(\alpha_x)$ pour $x \in FV(t_2)$.

Posons μ tel que pour $x \in FV(t_1 t_2)$:

$$\mu(\alpha_x) = \begin{cases} \mu_1(\alpha_x) & \text{si } x \in FV(t_1) \\ \mu_2(\alpha_x) & \text{si } x \in FV(t_2) \end{cases}$$

qui est bien définie car si $x \in FV(t_1) \cap FV(t_2)$, $\mu_1(\alpha_x) = \Gamma(x) = \mu_2(\alpha_x)$.

$$\mu(\tau_{t_1}) = \sigma' \rightarrow \sigma$$

$$\mu(\tau_{t_2}) = \sigma$$

$$\mu(\tau_{t_1 t_2}) = \sigma$$

Donc μ unifie $E_{t_1 t_2} = E_{t_1} \cup E_{t_2} \cup \{\tau_{t_1} = \tau_{t_2} \rightarrow \tau_{t_1 t_2}\}$.

et on a bien $\mu(\tau_{t_1 t_2}) = \sigma$

$$\mu(\alpha_x) = \Gamma(x) \text{ pour } x \in FV(t_1 t_2)$$

⇐ On a μ qui unifie $E_{t_1 t_2} = E_{t_1} \cup E_{t_2} \cup \{\tau_{t_1} = \tau_{t_2} \rightarrow \alpha\}$.

En particulier, μ unifie E_{t_1} et E_{t_2} ~~car toutes nos hypothèses~~, car alors

$$\Gamma_1 \vdash t_1 : \mu(\tau_{t_1}) \quad \text{où} \quad \Gamma_1(x) = \mu(\alpha_x) \text{ pour } x \in FV(t_1)$$

$$\Gamma_2 \vdash t_2 : \mu(\tau_{t_2}) \quad \text{où} \quad \Gamma_2(x) = \mu(\alpha_x) \text{ pour } x \in FV(t_2)$$

Et μ unifie $\{\tau_{t_1} = \tau_{t_2} \rightarrow \alpha\}$ donc $\mu(\tau_{t_1}) = \mu(\tau_{t_2}) \rightarrow \mu(\alpha)$

$$\text{soit } \Gamma_1 \vdash t_1 : \mu(\tau_{t_2}) \rightarrow \mu(\alpha)$$

On peut donc utiliser la règle d'application de fonction avec $\Gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\frac{\Gamma' \vdash t_1 : \mu(\tau_{t_2}) \rightarrow \mu(\alpha) \quad \Gamma' \vdash t_2 : \mu(\tau_{t_2})}{\Gamma' \vdash t_1 t_2 : \mu(\alpha)}$$

et on a évidemment $\mu(\Gamma'(x)) = \mu(\alpha_x)$ pour $x \in FV(t_1 t_2)$

* si $t = \lambda x. t_1$

$\Rightarrow$ On a $\Gamma \vdash \lambda x. t_1 : \sigma' \rightarrow \sigma$.

Où $\Gamma, x : \sigma' \vdash t_1 : \sigma$

Il existe alors un unifiant E_{t_1} tel que $\mu(\tau_{t_1}) = \sigma$

$$\begin{aligned} \mu(\alpha_x) &= \Gamma(y) \text{ pour } y \in \text{FV}(t_1) \\ \mu(\alpha_x) &= \sigma' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ce qui donne } \mu(\tau_{\lambda x. t_1}) &= \mu(\tau_x \rightarrow \tau_{t_1}) \\ &= \mu(\tau_x) \rightarrow \mu(\tau_{t_1}) \\ &= \sigma' \rightarrow \sigma \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ On a μ qui unifie $E_t = E_{t_1}$

Et il existe Γ' tel que

$$\Gamma' \vdash t_1 : \mu(\tau_{t_1})$$

$$\Gamma'(y) = \mu(\alpha_y) \text{ pour tout } y \in \text{FV}(t_1).$$

Des lors,

soit $x \in \text{dom } \Gamma'$, et on a

$$\frac{\Gamma' \vdash t_1 : \mu(\tau_{t_1})}{\Gamma' \vdash \lambda x. t_1 : \underbrace{\mu(\alpha_x) \rightarrow \mu(\tau_{t_1})}_{= \mu(\tau_{\lambda x. t_1})}}$$

* soit $x \notin \text{dom } \Gamma'$, et on a, avec $\sigma = \mu(\alpha_x)$

$$\frac{\Gamma', x : \sigma \vdash t_1 : \mu(\tau_{t_1})}{\Gamma', x : \sigma \vdash \lambda x. t_1 : \sigma \rightarrow \mu(\tau_{t_1})}.$$